PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD · 2014

Matemáticas II

· BACHILLERATO
· FORMACIÓN PROFESIONAL
· CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Examen

Criterios de Corrección y Calificación

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
NAZIOARTEKO BIKAINTASUN CAMPUSA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL
www.ehu.es

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK	*PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
	2014ko UZTAILA	JULIO 2014
	MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS II*

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK	*PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2014ko UZTAILA	JULIO 2014
MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS II*

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -x + my + 2z &= m \\ 2x + my - z &= 2 \\ mx - y + 2z &= m \end{aligned}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.
b) Para m = -1 resolver en caso de que sea posible. Si es imposible explicar por qué.

Ejercicio A2

Dado el punto *P*(2,-1, 3) y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$

a) Calcular la proyección del punto *P* sobre la recta r.
b) Calcular la distancia de *P* a r.
c) Obtener el simétrico del punto *P* respecto a la recta r.

Ejercicio A3

a) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.
b) Trazar un dibujo aproximado de la gráfica de f y contestar de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 0$?

Ejercicio A4

Dibujar el recinto encerrado entre la gráfica de la función: $y = x^2 - 6x$, y la de la función: $y = 3x$ y calcular su área.

Ejercicio A5

Se hacen variar las tres dimensiones de una caja cúbica (las tres dimensiones iguales) de la siguiente manera: se aumenta un 20% su altura, se disminuye un 20% su anchura y se mantiene la misma dimensión para su largura.

a) ¿Afecta esta variación a su volumen? ¿cuánto?
b) ¿El área total de la nueva caja disminuye en más del veinte por ciento?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} c+d & d \\ 2c & c+d \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de c y d la matriz A tiene inversa.

b) Determinar la inversa de la matriz A^2 en el caso $c = 1$; $d = -2$.

Ejercicio B2

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases}$ y el plano $3x - 5y + A\,z = -31$.

a) Calcular el valor del parámetro A para que la recta y el plano sean paralelos.

b) Para A = 12 calcular la intersección de la recta y el plano.

Ejercicio B3

Se sabe que la suma de los cuadrados de dos números positivos *A* y *B* vale 32. Calcular dichos números para que su producto *A·B* sea máximo.

Ejercicio B4

Hallar la integral indefinida

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}\,dx,$$

explicando el método utilizado para dicho cálculo.

Ejercicio B5

Al sumar 21 múltiplos seguidos de 3 obtenemos el valor 1260. En esta suma ¿cuál es el primer múltiplo de 3? ¿Y el último?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

JULIO- OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)
- Resolución y discusión del sistema de manera adecuada (1 punto)
- Resolución adecuada del problema en el caso m = -1 (1 punto)

Problema A.2 (2 puntos)
- Planteamiento del problema y obtención la proyección de P sobre la recta r (1 punto)
- Obtención de la distancia de P a la recta r (o bien la distancia de P a su punto proyección)(0,5 puntos)
- Cálculo del punto simétrico de P respecto a la recta r (0, 5 puntos)

Problema A.3 (2 puntos)
- Obtención de la derivada de la función y su discusión respecto al crecimiento, decrecimiento de la función, así como la obtención de los máximos y mínimos(1 punto)
- Dibujo aproximado de la función y contestación correcta al número de valores que anulan la función (1 punto)

Problema A. 4 (2 puntos)
- Dibujo de las dos parábolas y obtención del recinto(1 punto)
- Cálculo del área del recinto aplicando la regla de Barrow(1punto)

Problema A.5 (2 puntos)
- Obtención del nuevo volumen y comparación con el anterior. Deberían decir que disminuye en un 4%, también se daría por bueno poner el valor 0, 96 V y comentar que disminuye respecto al original en una cantidad cercana al 5% (1 punto).
- Obtención del área total de nueva caja llegando al valor 3,52 A y luego comentar cuanto ha supuesto esta disminución llegando a concluir que es más del 20%(1 punto)

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Resolución y discusión del determinante de la matriz de manera adecuada y obtención de la condición sobre c y d (1 punto)
- Obtención de la matriz inversa para el caso pedido (1 punto)

Problema B.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema imponiendo la condición de que el plano y la recta sean paralelos a través de la anulación del producto escalar del vector normal al plano y el director a la recta.(1 punto)
- Resolución adecuada del punto intersección del plano y la recta(1 punto)

Problema B.3 (2 puntos)

- Obtención de la función a maximizar(1 punto)
- Cálculo de los valores pedidos mediante la imposición de la anulación de la derivada de la función objetivo y su posterior discusión(1 punto)

Problema B. 4 (2 puntos)

- Descomposición de la función en fracciones simples y obtención de cada una de ellas (1 punto)
- Cálculo de las tres integralesl(1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema mediante cualquier medio de representación (numérica, analítica, geométrica,..)(1 punto).
- Resolución correcta por cualquier procedimiento (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Problema A.1

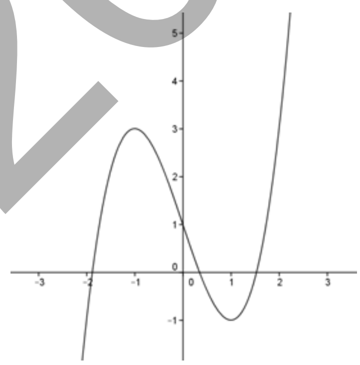
a) El determinante del sistema es $|A| = 3m^2 - 6m - 3$; se anula para el valor m = -1 y por tanto para todo valor m distinto de -1 el sistema es compatible determinado.
b) Para m = -1 la matriz tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 2, por tanto el sistema es compatible indeterminado, la solución es (a+1, a, a) con a un número real.

Problema A.2

a) Obtenemos el plano que pasa por el punto P y que tiene como vector normal el vector director de la recta, luego hallamos la intersección de dicho plano con la recta. Así obtenemos la proyección del punto P sobre la recta.
b) El plano es : 3 x+5 y+2 z =7, el punto proyección es : M(3,-2, 4).
c) La distancia de P a r es la misma que la distancia entre los puntos P y M, dando $\sqrt{3}$. El punto simétrico de P es T(4, -3, 5).

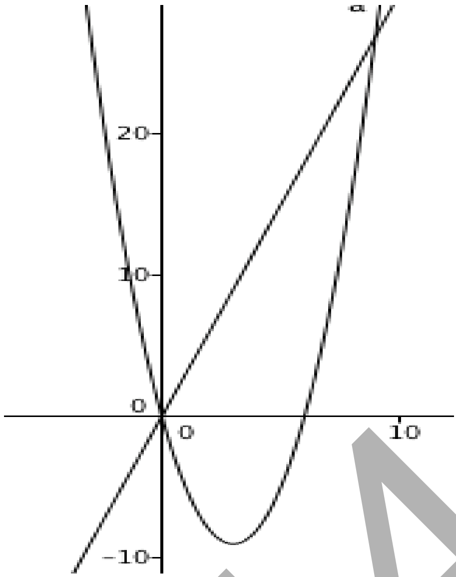
Problema A.3

a) Derivando e igualando a cero obtenemos los puntos críticos. En nuestro caso x = 1(mínimo) y x = -1(máximo).
b) La función es creciente $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ y decreciente en $(-1,+1)$



Puede observarse que tiene tres valores en los que la función se anula.

Problema A.4



Las gráficas se cortan en los puntos x = 0 y x = 9. El área del recinto se obtiene aplicando la regla de Barrow, esto es:

$$A = \int_0^9 (3x - x^2 + 6x)dx = \frac{729}{6} = \frac{243}{2}.$$

Problema A.5

a) El volumen original de la caja cúbica es $V = x^3$, después de los cambios su nuevo volumen es $V' = (1{,}2\ x).(0{,}8\ x)\ x = 0{,}96\ x^3$, por tanto el volumen disminuye en un 4%

b) El área total en el primer caso es $A = 6x^2$, mientras que en el segundo caso es:

$$A' = 2\ (1{,}2\ x^2 + (0{,}8)(1{,}2)x^2 + 0{,}8\ x^2) = 5{,}92\ x^2,$$

luego no disminuye su área total en más del 20% (ya que una disminución del 20% del valor original sería $A = 4{,}8\ x^2$).

OPCIÓN B

Problema B.1

a) Para que *A* tenga inversa su determinante ha de ser distintos de cero. Desarrollando tenemos que $|A| = c^2 + d^2$, por tanto en el caso de que c = d = 0 la matriz *A* no tendrá inversa.

b) Queremos calcular la matriz inversa de $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Su inversa es: $\begin{pmatrix} \frac{-3}{25} & \frac{-4}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{-3}{25} \end{pmatrix}$, siendo 25 el determinante de la matriz A^2

.

Problema B.2

a) Para que sean paralelos se ha de verificar que el vector normal del plano y el vector director de la recta han de ser perpendiculares. Por tanto su producto escalar ha de ser cero. El vector normal del plano es (3, -5, A) y el vector director de la recta es (-3, -7,-1). Imponiendo la condición de producto escalar nos da: A = 26

b) Para A = 12 la intersección es el punto (2,5,-1).

Problema B.3

Queremos maximizar P = $x \cdot y$ con la condición de que $x^2 + y^2 = 32$, por tanto hay que hallar el máximo de $P = x.\sqrt{32 - x^2}$. Derivando P e igualando a cero obtenemos el valor 4 para A y B.

Problema B.4

Es una integral racional. El denominador del integrando tiene tres raíces simples: 1, 2 y 3. Descomponiendo la integral en fracciones simples llegamos al resultado**:**

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}dx = 5\ln(x-1) - 13\ln(x-2) + 8\ln(x-3) + C$$

Problema B.5

Llamando x al primer múltiplo de 3, podemos escribir la ecuación:

x + (x + 3) + (x + 60) = 1260,

de donde 21 x + 630 = 1260. Resolviendo resulta x = 30. Por tanto el primer múltiplo es 30 y el último 90.